Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Волгодонский инженерно-технический институт – филиал НИЯУ МИФИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению индивидуального домашнего задания (контрольной работы)

по курсу

«ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ»

для студентов специальности 230201
«Информационные системы и технологии»
всех форм обучения

Волгодонск

2010

УДК 519.8 (075.8)
Рецензент д.т.н., профессор А. В. Чернов

Составитель **ст. преп. Цуверкалова О.Ф.**

Метод. указ. к выполнению индивидуального домашнего задания (контрольной работы) по дисциплине «Линейное программирование» /ВИТИ НИЯУ МИФИ. Волгодонск, 2010. 52 с.

Предназначены для студентов очной, очно-заочной и заочной формы обучения специальности 230201 – Информационные системы и технологии

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Целью выполнения индивидуального домашнего задания (контрольной работы) по курсу «Линейное программирование» является совершенствование навыков построения математических моделей и решения линейных оптимизационных задач с ограничениями.

Перед выполнением заданий студент должен ознакомиться с соответствующими теоретическими разделами курса и ответить на вопросы для самоконтроля, помещенные в конце каждой задачи.

Первая часть задания включает в себя задачи 1-3 и посвящена прямой и двойственной задаче линейного программирования (ЗЛП).

Задача 1 заключается в отыскании минимума линейной функции двух переменных в замкнутой области геометрическим путем. При решении в первую очередь необходимо построить область допустимых значений переменных, заданную системой неравенств. Направление роста целевой функции определяется вектором-градиентом, координаты которого равны коэффициентам при неизвестных в целевой функции. Для получения оптимального решения следует построить вектор-градиент, провести какую-либо линию уровня целевой функции перпендикулярно градиенту и перемещать ее в направлении антиградиента до достижения точки минимума.

В задаче 2 требуется построить математическую модель задачи максимизации прибыли производственного предприятия и определить максимальный план производства, а также сформулировать и решить двойственную задачу. Следует обратить внимание на экономический смысл задач и входящих в них переменных. В конце решения следует дать экономическую интерпретацию результатов.

Задача 3 посвящена применению метода искусственного базиса для отыскания начального допустимого решения ЗЛП. При решении задачи необходимо сформулировать вспомогательную ЗЛП и решить ее симплекс-методом, последовательно исключая искусственные переменные. Если минимум вспомогательной целевой функции равен 0, то найденное решение следует принять за начальный план исходной задачи, проверить его оптимальность и, если необходимо, продолжить решение симплекс-методом.

Вторая часть задания состоит из задач 4-7 и посвящена частным случаям ЗЛП (целочисленное программирование и транспортная задача), а также основам матричной теории игр и применению линейного программирования для отыскания оптимальных стратегий матричной игры.

Задача 4 посвящена решению целочисленной задачи линейного программирования методом Гомори, заключающимся в последовательном отсечении нецелочисленных оптимальных решений. Если задача допускает геометрическую интерпретацию, то следует графически показать ход решения.

Задача 5 рассматривает частный случай ЗЛП – транспортную задачу по критерию стоимости. Перед началом решения следует проверить, является ли модель задачи закрытой. Если нет, то следует преобразовать ее в закрытую путем введения фиктивного поставщика (потребителя). Начальное распределение поставок проводится методами северо-западного угла и наименьших затрат. Оптимизировать следует распределение, полученное методом северо-западного угла. В конце решения необходимо определить, является ли найденный оптимальный план единственным, и пояснить, почему.

Задача 6 предназначена для знакомства с основными понятиями матричной теории игр и минимаксными чистыми стратегиями.

Задача 7 ориентирована на отыскание оптимальной смешанной стратегии игры путем сведения ее к задаче линейного программирования. Перед началом решения следует выполнить упрощение игры путем отбрасывания заведомо невыгодных стратегий, если это возможно. Найденное решение необходимо сравнить с решением, полученным графическим путем.

Выбор варианта задания осуществляется в соответствии с порядковым номером студента по журналу (для студентов дневной формы обучения) или по номеру зачетки в соответствии с Приложением 1 (для студентов очно-заочной и заочной форм обучения).

Требования к оформлению. Отчеты по задачам должны быть выполнены с соблюдением всех требований, предъявляемых к оформлению документов в учебном процессе. Все расчеты должны быть выполнены без округлений, дробные результаты – представлены в обыкновенных дробях. При нахождении решения геометрическим методом все графики должны быть выполнены с соблюдением масштаба.

Рекомендуемая литература:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1986.

2. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2000. – 407 с.

3. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.. Высшая математика: Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1994. - 286 с.

4. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. – М.: Высш. шк., 1986. – 287 с.

5. Цуверкалова О.Ф. Курс лекций по дисциплине «Линейное программирование».

ЗАДАЧА 1

Решить графически ЗЛП $f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min$ при указанных ограничениях:

№	c_1	c_2	Ограничения
1.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
2.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ 2x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
3.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
4.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
5.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 2x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
6.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \ge 11 \\ 2x_1 + x_2 \ge 11 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
7.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

№	c_1	c_2	Ограничения
8.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 2x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
9.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
10.	2	5	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
11.	2	5	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + x_2 \ge 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
12.	2	5	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 13 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
13.	2	5	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
14.	2	5	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 2x_1 + x_2 \ge 14 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

№	c_1	c_2	Ограничения
15.	3	2	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
16.	2	5	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1 + 2x_2 \le 13 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
17.	2	5	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 \ge 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
18.	2	5	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \le 17 \\ 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
19.	2	5	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
20.	4	-1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
21.	4	-1	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 11 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
22.	4	-1	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 2x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
23.	2	5	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 11 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
24.	4	-1	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \ge 11 \\ 2x_1 + x_2 \ge 11 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
25.	4	-1	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \ge 9 \\ 2x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
26.	4	-1	$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 13 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
27.	4	-1	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
28.	4	-1	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
29.	4	-1	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$
30.	4	-1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \le 17 \\ 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Образец выполнения задачи 1.

Решим графически следующую ЗЛП:

$$f(x) = 2x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$$

[illegible]

Построим область допустимых значений – четырехугольник ABCD (рис.1).

Координаты вектор-градиента равны коэффициентам целевой функции:

$$\overline{C} = \{2; -3\}.$$

Проведём через область ABCD произвольную линию уровня перпендикулярно направлению градиента – прямая (4).

Поскольку задача решается на максимум, перемещаем линию уровня (4) в направлении возрастания целевой функции, т.е. в направлении градиента. (Если задача решается на минимум, линия уровня перемещается в направлении антиградиента.)

Предельное положение – линия (5). Следовательно, точка D является оптимальным решением, обеспечивающим максимальное значение целевой функции.

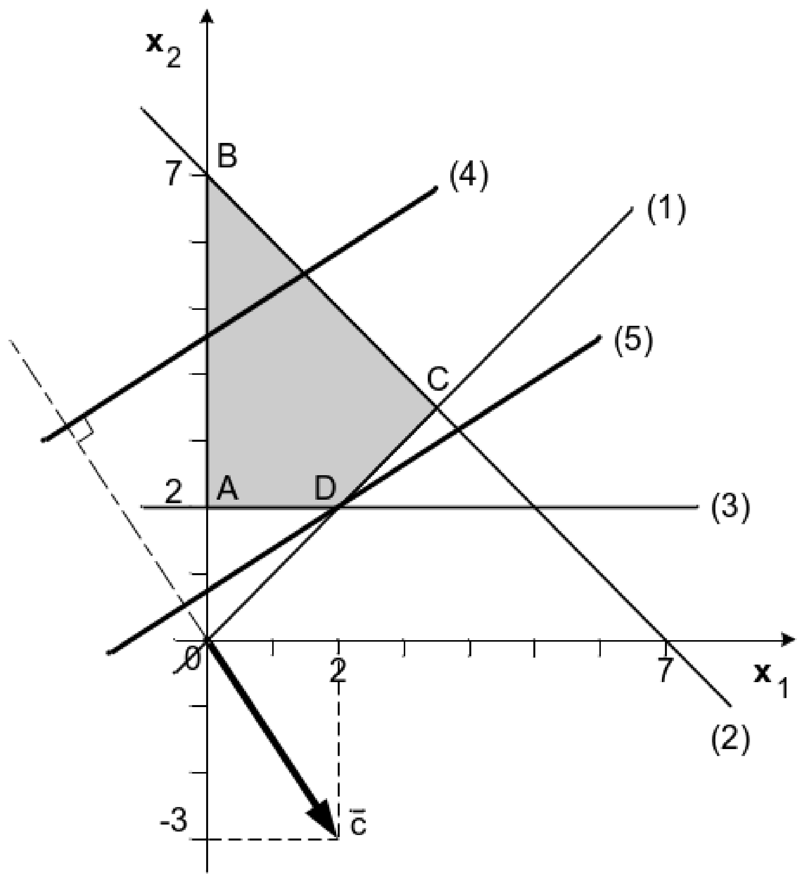


Рисунок 1 – Графическое решение ЗЛП.

Определим координаты точки D как пересечение прямых (1) и (3):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Оптимальное решение:

$$x^* = (2;2),$$

$$f^* = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Вопросы для самопроверки:

1) Как определить какая из полуплоскостей удовлетворяет заданному ограничению?

2) Какой вид может иметь область допустимых значений?

3) В каком случае ЗЛП имеет бесконечное множество решений? Не имеет решений?

4) В каком случае ЗЛП можно решить графически?

5) Как свести многомерную ЗЛП к графическому решению?

ЗАДАЧА 2

Предприятие производит три вида продукции A_1, A_2, A_3, используя сырье двух видов B_1, B_2. Затраты a_{ij} сырья i-го вида на единицу продукции j-го вида и запасы сырья i-го вида b_i, а также прибыль c_j, получаемая от продажи единицы продукции j-го вида, приведены в таблице. Определить план производства изделий, при котором суммарная прибыль будет максимальной.
Решить задачу симплекс-методом. Составить двойственную задачу и решить ее симплекс-методом. Показать взаимосвязь между двойственными задачами.
Одну из двойственных задач решить графическим методом.

1.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	1	2	2	1100
B_2	3	4	2	1500
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

2.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	3	4	1200
B_2	3	1	2	1600
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

3.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	1	2	1	1000
B_2	3	5	2	1500
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

4.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	1	4	1600
B_2	2	1	3	1800
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

5.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	4	1	3	1500
B_2	4	2	1	2000
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

6.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	1	1	800
B_2	2	3	2	1200
Прибыль на единицу продукции	3	3	3	

7.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	3	1	2	900
B_2	1	2	3	1000
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

8.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	3	1	1	1800
B_2	2	3	1	2400
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

9.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	2	1	1300
B_2	3	2	2	900
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

10.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	1	2	2100
B_2	2	2	1	1200
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

11.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	1	2	2	2200
B_2	3	4	2	3000
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

12.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	3	4	600
B_2	3	1	2	800
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

13.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	1	2	1	2000
B_2	3	5	2	3000
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

14.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	1	4	800
B_2	2	1	3	900
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

15.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции	

	A_1	A_2	A_3	Общий запас сырья
B_1	4	1	3	3000
B_2	4	2	1	4000
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

16.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	1	1	400
B_2	2	3	2	600
Прибыль на единицу продукции	3	3	3	

17.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	3	1	2	1800
B_2	1	2	3	2000
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

18.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	3	1	1	900
B_2	2	3	1	1200
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

19.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	2	1	2600
B_2	3	2	2	1800
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

20.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции	

	A_1	A_2	A_3	Общий запас сырья
B_1	2	1	2	1050
B_2	2	2	1	600
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

21.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	1	2	2	550
B_2	3	4	2	750
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

22.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	3	4	2400
B_2	3	1	2	3200
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

23.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	1	2	1	500
B_2	3	5	2	750
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

24.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	1	4	3200
B_2	2	1	3	3600
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

25.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	

B_1	4	1	3	750
B_2	4	2	1	1000
Прибыль на единицу продукции	2	1	3	

26.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	1	1	1600
B_2	2	3	2	2400
Прибыль на единицу продукции	3	3	3	

27.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	3	1	2	2700
B_2	1	2	3	300
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

28.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	3	1	1	3600
B_2	2	3	1	4800
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

29.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	2	1	650
B_2	3	2	2	450
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

30.

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции			Общий запас сырья
	A_1	A_2	A_3	
B_1	2	1	2	4200
B_2	2	2	1	2400
Прибыль на единицу продукции	3	3	2	

Образец выполнения задачи 2.

1) Пусть исходные данные для решения задачи представлены в следующей таблице:

Вид сырья	Расход сырья на единицу продукции, ед.			Общий запас сырья, ед.
	A_1	A_2	A_3	
B_1	5	2	3	3200
B_2	2	4	1	2800
Прибыль на единицу продукции, ден.ед.	2	5	3	

Составим математическую модель задачи. Обозначим x_i – количество продукции A_i $(i=1,2,3)$.

Целевая функция – суммарная прибыль предприятия:

$$F=2x_1+5x_2+3x_3 \to \max$$

Общий расход ресурсов не должен превышать имеющегося запаса:

$$5x_1+2x_2+3x_3 \le 3200, \quad (B_1)$$
$$2x_1+4x_2+x_3 \le 2800. \quad (B_2)$$

Все переменные x_i неотрицательны: $x_i \ge 0, i=1,2,3$

Вводя дополнительные переменные, приведём задачу к каноническому виду:

$$F=2x_1+5x_2+3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+3x_3+x_4=3200, \\ 2x_1+4x_2+x_3+x_5=2800, \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5. \end{cases}$$

Выберем в качестве базисных переменных x_4 и x_5. Полагая свободные переменные $x_1=x_2=x_3=0$, имеем: $x_4=3200$, $x_5=2800$.

Таким образом, начальное допустимое решение имеет вид(

$x^{(0)}=(0;0;0;3200;2800)$, $F_0=0$.

Составим симплекс-таблицу:

а)

	x_1	x_2	x_3	b_i	оценочное отношение
x_4	5	2	3	3200	3200 : 2 = 1600
x_5	2	4	1	2800	2800 : 4 = 700
F	2	5	3	0	

Выбираем в качестве разрешающего столбца столбец с наибольшим коэффициентом целевой функции. В качестве разрешающей строки берется строка, в которой достигается наименьшее оценочное отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца.

Пересчитываем симплекс-таблицу.

б)

	x_1	x_5	x_3	b_i	оценочное отношение
x_4	4	-1/2	5/2	1800	1800 : (5/2) = 720
x_2	1/2	1/4	1/4	700	700 : (1/4) = 2800
F	-1/2	-5/4	7/4	-3500	

Допустимое решение:

$$x^{(1)} = (0;700;0;1800;0),$$
$$F_1 = 3500.$$

Новое решение не является оптимальным, т.к. в целевой функции есть свободная переменная с положительным коэффициентом. Переводим эту переменную в свободные (разрешающий столбец). Определяем разрешающую стоку и снова пересчитываем симплекс-таблицу.

в)

	x_1	x_5	x_4	b_i
x_3	8/5	-1/5	2/5	720
x_2	8/5	3/10	-1/10	520
F	-33/10	-9/10	-7/10	-4760

Поскольку в строке целевой функции не осталось положительных коэффициентов, то найденное решение оптимально:

$$x^* = (0;520;720;0;0),$$
$$F^* = 4760.$$

Следовательно, предприятию необходимо производить 520 ед. продукции A_2 и 720 ед. продукции A_3, при этом прибыль составит 4760 руб. Так как в оптимальном решении $x_4 = x_5 = 0$, то запасы обоих ресурсов будут исчерпаны полностью.

2) Составим двойственную ЗЛП. Обозначив двойственные цены на ресурсы через y_1 и y_2 и учитывая свойства двойственных задач, получаем:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 3200 \\ 2 & 4 & 1 & 2800 \\ \hline 2 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad A^T = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \\ \hline 3200 & 2800 & 0 \end{array}\right)$$

$$Z = 3200y_1 + 2800y_2 \to \min,$$

Приведём к каноническому виду:

$$Z = 3200y_1 + 2800y_2 \to \min,$$

Поскольку переменные y_3, y_4, y_5 входят в ограничения со знаком «минус» то их нельзя выбирать в качестве базисных (полученное решение будет недопустимым).

Найдём начальное допустимое решение методом искусственного базиса. Введём в каждое ограничение искусственные переменные $t_j, j = 1,2,3$ и составим вспомогательную ЗЛП:

[illegible]

$$\tilde{Z}(t) = t_1 + t_2 + t_3 = (2 - 5y_1 - 2y_2 + y_3) + (5 - 2y_1 - 4y_2 + y_4) + (3 - 3y_1 - y_2 + y_5) =$$
$$= 10 - 10y_1 - 7y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to \min$$

а)

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		оценочное отношение
t_1	5	2	-1	0	0	2	2/5
t_2	2	4	0	-1	0	5	5/2
t_3	3	1	0	0	-1	3	1
$\tilde{Z}$	-10	-7	1	1	1	-10	

б)

	t_1	y_2	y_3	y_4	y_5		оценочное отношение
y_1	1/5	2/5	-1/5	0	0	2/5	-
t_2	-2/5	16/5	2/5	-1	0	21/5	21/5 : 2/5 = 21/2
t_3	-3/5	-1/5	3/5	0	-1	2/5	2/5 : 3/5 = 2/3
$\tilde{Z}$	2	-3	-1	1	1	-6	

Поскольку искусственная переменная t_1 перешла в свободные, соответствующий столбец можно исключить из симплекс-таблицы.

в)

	y_2	t_3	y_4	y_5		оценочное отношение
y_1	1/3	1/3	0	-1/3	1	1 : 1/3 = 3
t_2	10/3	-2/3	-1	2/3	3	3 : 10/3 = 9/10
y_3	-1/3	5/3	0	-5/3	3	-
$\tilde{Z}$	-10/3	5/3	1	-2/3	-3	

d)

	t_2	y_4	y_5	
y_1	-1/10	1/10	-2/5	7/10
y_2	3/10	-3/10	1/5	9/10
y_3	1/10	-1/10	-8/5	33/10
$\tilde{Z}$	1	0	0	0

Получили допустимое решение $x^{(0)} = (7/10;9/10;33/10;0;0)$

Выразим базисные переменные через свободные и подставим в целевую функцию:

$$\left.\begin{aligned} y_1 + 1/10y_4 - 2/5y_5 &= 7/10 \\ y_2 - 3/10y_4 + 1/5y_5 &= 9/10 \\ y_3 - 1/10y_4 - 8/5y_5 &= 33/10 \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} y_1 &= 7/10 - 1/10y_4 + 2/5y_5 \\ y_2 &= 9/10 + 3/10y_4 - 1/5y_5 \\ y_3 &= 33/10 + 1/10y_4 + 8/5y_5 \end{aligned}$$

$$Z = 3200(7/10 - 1/10y_4 + 2/5y_5) + 2800(9/10 + 3/10y_4 - 1/5y_5) =$$
$$= 2240 - 320y_1 + 1280y_5 + 2520 + 840y_4 - 560y_5 = 4760 + 520y_4 + 720y_5 \to \min$$

В целевой функции не осталось положительных коэффициентов, следовательно, найденное решение оптимально:

$y^* = (7/10;9/10;33/10;0;0)$

$Z^* = 4760$

Покажем взаимосвязь двойственных задач.

1) Оптимальные значения целевых функций равны: $F^* = Z^* = 4760$

2) Установим взаимосвязь между основными и дополнительными переменными двойственных задач:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_3 & y_4 & y_5 & y_1 & y_2 \end{array}$$

Значения базисных переменных одной из задач равны по модулю коэффициентам целевой функции другой задачи, выраженным через свободные переменные. Составим таблицу:

Переменные прямой задачи	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Компоненты оптимального решения x^*	0	520	720	0	0
Коэффициенты целевой функции F	-33/10	-	-	-7/10	-9/10
Компоненты оптимального решения y^*	33/10	0	0	7/10	9/10
Коэффициенты целевой функции Z	-	520	720	-	-
Переменные двойственной задачи	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2

Вопросы для самопроверки:

1) Какие задачи называются двойственными?
2) Опишите алгоритм построения двойственной задачи
3) Сформулируйте основные теоремы двойственности.
4) В чем смысл условий дополняющей нежесткости?

5) Как найти решение двойственной задачи по известному решению прямой задачи?

Задача 3

Решить задачу линейного программирования симплекс-методом, найдя начальное допустимое решение методом искусственного базиса.

1. $f(x)=2x_1+x_2+x_3+7x_4-2x_5 \to \min$ $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_5=7 \\ x_1+2x_2+x_3-7x_4+x_5=6 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$	**2.** $f(x)=2x_1-x_2-4x_3+x_4+x_5 \to \max$ $\begin{cases} x_2+2x_4-x_5=1 \\ x_1-x_4-x_5=1 \\ 2x_2+x_3+2x_5=4 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$
3. $f(x)=x_1-x_2-x_3-x_4-3x_5 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_4+x_5=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3-2x_5=1 \\ -3x_1+2x_3-x_4+2x_5=1 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$	**4.** $f(x)=x_1+4x_4 \to \max$ $\begin{cases} -x_1-2x_2+2x_3+x_4+5x_5=13 \\ -2x_1+2x_2+4x_4+x_5=5 \\ x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5=5 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$
5. $f(x)=-3x_1+x_3-2x_4 \to \min$ $\begin{cases} 15x_1+2x_2-3x_3-7x_4+x_5=4 \\ 2x_1+x_2+x_3-2x_4=3 \\ x_3+5x_4+2x_5=7 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$	**6.** $f(x)=-x_1+x_2+2x_3-x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=7 \\ -3x_1+x_2+2x_3+x_4=6 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=2 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,4 \end{cases}$
7. $f(x)=-x_1-2x_2-x_3+x_4 \to \max$ $\begin{cases} 10x_2+x_3+2x_4+3x_5=25 \\ -x_1+5x_2+x_3+x_4+x_5=10 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=6 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$	**8.** $f(x)=-34x_1+x_2+3x_3-3x_4 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1-2x_2+3x_3+2x_4=9 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ -x_1-x_2+2x_3+x_4=6 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,4 \end{cases}$
9. $f(x)=-x_1-3x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_5+x_6=10 \\ 2x_1+2x_2+x_4+x_6=25 \\ -2x_1+3x_2+x_3-x_5=9 \\ 6x_2+x_3+x_4=36 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,6 \end{cases}$	**10.** $f(x)=3x_1-2x_2-3x_4+x_5 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2-x_6=3 \\ 4x_1-x_2+x_4+x_5=19 \\ 4x_1-x_2-x_4+x_5=13 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,6 \end{cases}$

11.	**12.**

$f(x)=2x_1+x_2+x_3+7x_4-2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_5=14 \\ x_1+2x_2+x_3-7x_4+x_5=12 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$$

$f(x)=-2x_1+x_2+4x_3-x_4-x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_2+2x_4-x_5=2 \\ x_1-x_4-x_5=2 \\ 2x_2+x_3+2x_5=8 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$$

13.

$f(x)=-x_1+x_2+x_3+x_4+3x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_4+x_5=6 \\ 3x_1-x_2+2x_3-2x_5=2 \\ -3x_1+2x_3-x_4+2x_5=2 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$$

14.

$f(x)=-x_1-4x_4 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1-2x_2+2x_3+x_4+5x_5=26 \\ -2x_1+2x_2+4x_4+x_5=10 \\ x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5=10 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$$

15.

$f(x)=-3x_1+x_3-2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 15x_1+2x_2-3x_3-7x_4+x_5=8 \\ 2x_1+x_2+x_3-2x_4=6 \\ x_3+5x_4+2x_5=14 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$$

16.

$f(x)=x_1-x_2-2x_3+x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=14 \\ -3x_1+x_2+2x_3+x_4=12 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=4 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,4 \end{cases}$$

17.

$f(x)=x_1+2x_2+x_3-x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 10x_2+x_3+2x_4+3x_5=50 \\ -x_1+5x_2+x_3+x_4+x_5=20 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=12 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,5 \end{cases}$$

18.

$f(x)=-34x_1+x_2+3x_3-3x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+3x_3+2x_4=18 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ -x_1-x_2+2x_3+x_4=12 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,4 \end{cases}$$

19.

$f(x)=-x_1-3x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_5+x_6=20 \\ 2x_1+2x_2+x_4+x_6=50 \\ -2x_1+3x_2+x_3-x_5=18 \\ 6x_2+x_3+x_4=72 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,6 \end{cases}$$

20.

$f(x)=3x_1-2x_2-3x_4+x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+x_4=4 \\ x_1+x_2-x_6=6 \\ 4x_1-x_2+x_4+x_5=38 \\ 4x_1-x_2-x_4+x_5=26 \\ x_j \ge 0, \quad j=1,\dots,6 \end{cases}$$

21.

$f(x)=4x_1+2x_2+2x_3+14x_4-4x_5 \to \min$

22.

$f(x)=-4x_1+2x_2+8x_3-2x_4-2x_5 \to \min$

$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5 \end{cases}$	$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5 \end{cases}$
23. $f(x) = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 1 \\ -3x_1 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5 \end{cases}$	**24.** $f(x) = 2x_1 + 8x_4 \to \max$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 13 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5 \end{cases}$
25. $f(x) = 6x_1 - 2x_3 + 4x_4 \to \max$ $\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5 \end{cases}$	**26.** $f(x) = -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,4 \end{cases}$
27. $f(x) = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \min$ $\begin{cases} 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,5 \end{cases}$	**28.** $f(x) = 68x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 6x_4 \to \max$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,4 \end{cases}$
29. $f(x) = 2x_1 + 6x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 9 \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,6 \end{cases}$	**30.** $f(x) = -6x_1 + 4x_2 + 6x_4 - 2x_5 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_6 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 19 \\ 4x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 13 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1,...,6 \end{cases}$

Образец выполнения задачи 3.

Решить следующую ЗЛП

$$f(x) = 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 \to \max$$

[illegible]

найдя начальное допустимое решение методом искусственного базиса.

Приведём ограничения задачи к каноническому виду:

[illegible]

Введём искусственные переменные и составим вспомогательную ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 + y_1 = 11, \\ x_2 + x_3 - 4x_4 + x_6 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + y_2 = 46. \end{cases}$$

Базисные переменные y_1, y_2, x_6

Составим вспомогательную целевую функцию:

$\tilde{f}(y) = y_1 + y_2 \to \min$

$\tilde{f}(y) = 11 - x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + 46 - 3x_1 - 2x_2 - 2x_4 =$

$= 57 - 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5$

Составим симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Оценочное отношение
y_1	1	2	-3	1	-1	11	$11:1=11$
x_6	0	1	1	-4	0	8	-
y_2	3	2	0	2	0	46	$46:3=46/3$
$\tilde{f}(y)$	-4	-4	3	-3	1	-57	

Так как вспомогательная ЗЛП всегда решается на минимум, в строке нулевой функции не должно быть отрицательных коэффициентов. Выбираем столбец x_1 в качестве разрешающего и находим оценочные отношения (ОО). Строка y_1 - разрешающая (минимальное оценочное отношение). Пересчитываем симплекс-таблицу:

	y_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	2	-3	1	-1	11
x_6	0	1	1	-4	0	8
y_2	-3	-4	9	-1	3	13
$\tilde{f}(y)$	4	4	-9	1	-3	-13

Переменная y_1 перешла в свободные, следовательно, можно вычеркнуть столбец y_1. Продолжая решение, получаем:

	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Оценочное отношение
x_1	2	-3	1	-1	11	-
x_6	1	1	-4	0	8	$8 \div 1 = 8$
y_2	-4	9	-1	3	13	$13 \div 9 = 13/9$

$\tilde{f}(y)$	4	-9	1	-3	-13	

	x_2	y_2	x_4	x_5	b
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{46}{3}$
x_6	$\frac{13}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{35}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{59}{9}$
x_3	$-\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{9}$
$\tilde{f}(y)$	0	1	0	0	0

Так как в строке целевой функции получились нули, то допустимое решение найдено:

$$x^{(0)}=\left(\frac{46}{3};\,0;\,\frac{13}{9};\,0;\,0;\,\frac{59}{3}\right)$$

Проверим, будет ли это решение оптимальным.

Запишем систему ограничений, соответствующую последней симплекс-таблице:

$$\begin{cases} x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_4=\frac{46}{3}, \\ x_6+\frac{13}{9}x_2-\frac{35}{9}x_4-\frac{1}{3}x_5=\frac{59}{9}, \\ x_3-\frac{4}{9}x_2-\frac{1}{9}x_4+\frac{1}{3}x_5=\frac{13}{9}. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные x_1, x_3, x_6 через свободные и подставим их в целевую функцию исходной задачи:

$$f(x)=3\left(\frac{46}{3}-\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_4\right)+5x_2+\left(\frac{13}{9}+\frac{4}{9}x_2+\frac{1}{9}x_4-\frac{1}{3}x_5\right)+5x_4=$$

$$=\frac{427}{9}+\frac{31}{9}x_2+\frac{28}{9}x_4-\frac{1}{3}x_5\rightarrow \max$$

Так как в целевой функции, выраженной через свободные переменные, есть положительные коэффициенты, то допустимое решение не оптимально. Продолжим решение:

	x_2	x_4	x_5	b	ОО
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{46}{3}$	$\frac{46}{3}\div\frac{2}{3}=23$
x_6	$\frac{13}{9}$	$-\frac{35}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{59}{9}$	-
x_3	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{9}$	-
$f(x)$	$\frac{81}{9}$	$\frac{28}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{427}{9}$	

	x_2	x_1	x_5	b	ОО
x_4	1	$\frac{3}{2}$	0	23	$23 \div 1 = 23$
x_6	$\frac{16}{3}$	$\frac{35}{6}$	$-\frac{1}{3}$	96	$96 \div \frac{16}{3} = 18$
x_3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	4	-
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{14}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-119	

	x_6	x_1	x_5	b
x_4	$-\frac{3}{16}$	$\frac{13}{32}$	$\frac{1}{16}$	5
x_2	$\frac{3}{16}$	$\frac{85}{82}$	$-\frac{1}{16}$	18
x_3	$\frac{1}{16}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{5}{16}$	10
$f(x)$	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{161}{32}$	$-\frac{5}{16}$	-125

Поскольку в строке целевой функции не осталось положительных коэффициентов, то оптимальное (максимальное) решение найдено:

$x^* = (0;\ 18;\ 10;\ 5)$,

$f^* = 125$.

<u>Примечание:</u> Обратите внимание, что в ответе указываются только значения исходных переменных.

<u>Вопросы для самопроверки</u>:

1) В каком случае в ограничения задачи вводятся искусственные переменные?

2) В каком случае можно вычеркнуть искусственную переменную?

3) Как определить, будет ли найденное допустимое решение оптимальным?

4) Что можно сказать об исходной задаче, если оптимум вспомогательной задачи отличен от 0?

5) Что следует делать, если в оптимальном решении вспомогательной ЗЛП искусственная переменная является базисной?

6) Почему вспомогательная ЗЛП всегда имеет решение?

Задача 4

Решить полностью целочисленную задачу линейного программирования методом Гомори. Если это возможно, найти решение задачи геометрически.

1. $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2 \end{cases}$	**2.** $f(x) = -x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1 \le 2 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2 \end{cases}$
3. $f(x) = x_2 - x_3 \to \min$ $\begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2 \end{cases}$	**4.** $f(x) = -x_2 \to \min$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2 \end{cases}$
5. $f(x) = -4x_1 - 3x_2 \to \min$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,\dots,4 \end{cases}$	**6.** $f(x) = -x_1 - x_2 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,\dots,4 \end{cases}$
7. $f(x) = -2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,\dots,5 \end{cases}$	**8.** $f(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,\dots,4 \end{cases}$
9. $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,\dots,5 \end{cases}$	**10.** $f(x) = -x_3 \to \min$ $\begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6 \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,\dots,5 \end{cases}$
11. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min$	**12.** $f(x) = -2x_1 - x_2 - x_3 \to \min$

$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3\geq 10 \\ 2x_1+4x_3\geq 14 \\ 2x_2+x_3\geq 7 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,2,3 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3=16 \\ x_1+x_2\leq 7 \\ 3x_1+2x_3\geq 18 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,2,3 \end{cases}$
13. $f(x)=-4x_1-3x_2\to \min$ $\begin{cases} 4x_1+x_2\leq 44 \\ x_1\leq 22 \\ x_2\leq 18 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,2 \end{cases}$	**14.** $f(x)=x_1+2x_2+x_3\to \min$ $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3\geq 3 \\ 2x_1+x_2\geq 1 \\ 2x_2+3x_3\geq 4 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,2,3 \end{cases}$
15. $f(x)=8x_1+6x_2\to \max$ $\begin{cases} 4x_1+x_2\leq 10 \\ 2x_1+3x_2\leq 8 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,2 \end{cases}$	**16.** $f(x)=2x_1+2x_2\to \max$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2\leq 5 \\ x_1\leq 2 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,2 \end{cases}$
17. $f(x)=-2x_2+2x_3\to \max$ $\begin{cases} 3x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1-2x_2+x_3=1 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,2 \end{cases}$	**18.** $f(x)=2x_2\to \max$ $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=12 \\ -8x_1+3x_2+x_4=24 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,2 \end{cases}$
19. $f(x)=8x_1+6x_2\to \max$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=8 \\ 4x_1+x_2+x_4=10 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,\ldots,4 \end{cases}$	**20.** $f(x)=2x_1+2x_2\to \max$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=6 \\ 3x_1+2x_2+x_4=9 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,\ldots,4 \end{cases}$

21. $f(x)=4x_1-4x_2+6x_3-6x_4\to \max$ $\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=3 \\ x_2+x_3-2x_4=5 \\ 3x_2+x_4+x_5=4 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,\ldots,5 \end{cases}$	**22.** $f(x)=2x_1-4x_2+2x_3-2x_4\to \max$ $\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=8 \\ x_1+x_2-x_4=4 \\ -x_1+2x_2+x_3+3x_4=6 \\ x_j\geq 0,\ x_j\in Z,\quad j=1,\ldots,4 \end{cases}$
23.	**24.**

$f(x) = -2x_1 - 4x - 2x_5 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,...,5 \end{cases}$	$f(x) = 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} -6x_2 + 5x_3 + x_5 = 6 \\ 7x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,...,5 \end{cases}$
25. $f(x) = -6x_1 - 4x_2 - 2x_5 \to \min$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10 \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 14 \\ 2x_2 + x_3 \ge 7 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2,3 \end{cases}$	**26.** $f(x) = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 3x_1 + 2x_3 \ge 18 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2,3 \end{cases}$
27. $f(x) = 8x_1 + 6x_2 \to \max$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 44 \\ x_1 \le 22 \\ x_2 \le 18 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2 \end{cases}$	**28.** $f(x) = -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \to \max$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ 2x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 4 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2,3 \end{cases}$
29. $f(x) = -12x_1 - 9x_2 \to \min$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2 \end{cases}$	**30.** $f(x) = 5x_1 + 5x_2 \to \max$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1 \le 2 \\ x_j \ge 0,\ x_j \in Z, \quad j = 1,2 \end{cases}$

<u>Образец выполнения задачи 4</u>.

Решить методом Гомори полностью целочисленную ЗЛП:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \in Z. \end{cases}$$

1) Решаем задачу с отброшенным условием целочисленности, для чего приведём ограничения к каноническому виду:

$$f(x) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \ge 0; \quad j = 1..4. \end{cases}$$

Выберем переменные x_3, x_4 в качестве базисных и решим ЗЛП с помощью симплекс-таблиц:

	x_1	x_2	b	ОО
x_3	2	1	5	$5 \div 1 = 5$
x_4	2	3	9	$9 \div 3 = 3$
f	1	1	0	

	x_1	x_4	b	ОО
x_3	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	$2 \div \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$
x_2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	3	$3 \div \frac{2}{3} = \frac{9}{2}$
f	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-3	

	x_3	x_4	b
x_1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
f	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{2}$

Оптимальное решение найдено:

$x^*_{нц_1} = \left(\frac{3}{2};2\right), \qquad f^*_{нц_1} = \frac{7}{2}.$

Однако переменная x_1 не удовлетворяет условию целочисленности

2) Построим правильное отсечение, введя дополнительное ограничение. Для этого определим дробные части коэффициентов в строке x_1:

$\left\{\frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}; \quad \left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}; \quad \left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$

Добавляем переменную x_5, для которой коэффициенты в симплекс-таблице равны дробным частям строки x_1, взятым с обратным знаком, и продолжаем решение симплекс-методом.

Строка с отрицательной правой частью является разрешающейся. В качестве разрешающегося столбца выбирается столбец, в котором модуль отношения коэффициентов целевой функции к отрицательным элементам разрешающей строки будет минимальным. (В нашем случае можно выбирать любой столбец)

	x_3	x_4	b
x_1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
x_5	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
f	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{2}$

	x_5	x_4	b
x_1	1	-1	1
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{3}$
x_3	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
f	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$

Найдено оптимальное решение ЗЛП с дополнительным ограничением:

$x^*_{нц_2} = \left(1;\frac{7}{3}\right), \qquad f^*_{нц_2} = \frac{10}{3}.$

Однако оно снова не является целочисленным.

3) Формируем отсечение по строке x_2, добавляя переменную x_6.

	x_5	x_4	b

	x_6	x_4	b

x_1	1	-1	1
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{7}{3}$
x_3	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
x_6	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$
f	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

x_1	3	-1	0
x_2	-2	1	3
x_3	-4	1	2
x_5	-3	0	1
f	-1	0	-3

Найденное оптимальное решение удовлетворяет условию целочисленности:

$x_ц^* = (0;3)$, $\quad f_ц^* = 3$.

4) Поскольку исходная ЗЦП содержит только 2 переменных, её можно решить графически. Графическое решение ЗЦП практически не отличается от решения обычной ЗЛП, однако линия уровня перемещается лишь до тех пор, пока она проходит через точки с целочисленными координатами.

Графическое решение рассматриваемой ЗЦП приведено на рис.2. Прямые (1) и (2) соответствуют исходным ограничениям задачи.

Вектор-градиент имеет координаты $\overline{C} = \{1;1\}$

Прямая (3) – линия уровня, определяющая оптимальное решение нецелочисленной задачи.

Прямая (4) – линия уровня, определяющая оптимальное решение ЗЦП.

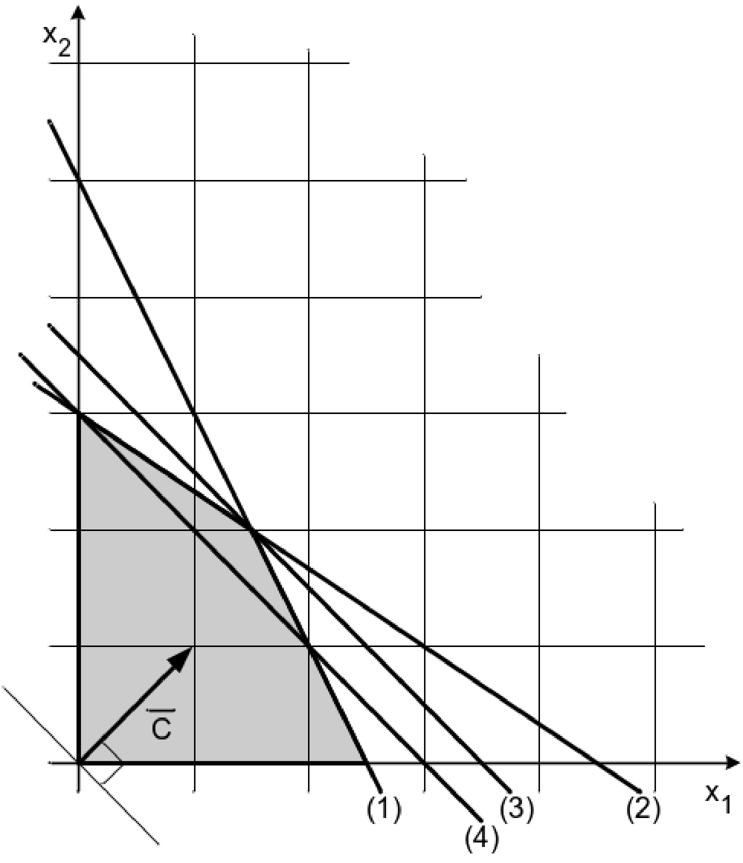


Рисунок 2 – Графическое решение задачи целочисленного программирования

Графическое решение показывает, что помимо найденного методом Гомори оптимального решения $x^*_{ц1} = (0;3)$, существует ещё 2 точки с целыми координатами $x^*_{ц2} = (1;2)$ и $x^*_{ц3} = (2;1)$, обеспечивающие то же значение целевой функции $f^* = 3$, и, следовательно, также являющиеся оптимальными решениями.

Неединственность оптимального решения можно заметить и по симплекс-таблице: в строке целевой функции есть нулевой коэффициент.

<u>Вопросы для самопроверки</u>:

1) Какова сущность задачи целочисленного программирования?
2) Почему при решении ЗЦП нельзя округлить найденное нецелочисленное решение?
3) В чём сущность методов отсечения для решения ЗЦП?
4) Какое отсечение называется правильным?
5) Что такое целая и дробная часть числа?
6) Перечислите основные этапы алгоритма Гомори для полностью целочисленной ЗЛП.

ЗАДАЧА 5

В транспортной задаче найти начальное распределение поставок методом северо-западного угла и методом наименьших затрат. Определить затраты при этих распределениях поставок.

Решить транспортную задачу методом потенциалов, взяв в качестве опорного плана решение, найденное методом северо-западного угла. Выяснить, будет ли найденное оптимальное решение единственным.

1.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	60
A_1	120	4	4	7	5
A_2	80	2	3	6	8
A_3	60	5	1	5	9

2.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	90	60	70
A_1	120	4	4	7	5
A_2	80	2	3	6	8
A_3	40	5	1	5	9

3.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		90	60	70	40
A_1	120	4	4	7	5
A_2	80	2	3	6	8
A_3	50	5	1	5	9

4.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	60
A_1	120	4	4	7	5
A_2	90	2	3	6	8
A_3	50	5	1	5	9

5.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	50	90	60
A_1	120	4	4	7	5
A_2	80	2	3	6	8
A_3	50	5	1	5	9

6.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	80
A_1	80	4	4	7	5
A_2	110	2	3	6	8
A_3	50	5	1	5	9

7.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	90	60	80
A_1	80	4	4	7	5
A_2	120	2	3	6	8
A_3	60	5	1	5	9

8.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		90	60	60	40
A_1	80	4	4	7	5
A_2	110	2	3	6	8
A_3	50	5	1	5	9

9.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	60
A_1	90	4	4	7	5
A_2	120	2	3	6	8
A_3	50	5	1	5	9

10.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		70	60	90	60
A_1	80	4	4	7	5
A_2	120	2	3	6	8
A_3	50	5	1	5	9

11.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	80	60
A_1	50	4	4	7	5
A_2	80	2	3	6	8
A_3	120	5	1	5	9

12.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	100	60	60
A_1	50	4	4	7	5
A_2	80	2	3	6	8
A_3	120	5	1	5	9

13.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		90	60	60	40
A_1	50	4	4	7	5
A_2	80	2	3	6	8
A_3	100	5	1	5	9

14.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	60
A_1	50	4	4	7	5
A_2	60	2	3	6	8
A_3	120	5	1	5	9

15.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	60	80	60
A_1	60	4	4	7	5
A_2	80	2	3	6	8
A_3	120	5	1	5	9

16.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	60
A_1	100	4	5	6	7
A_2	80	4	9	3	2
A_3	50	6	5	2	3

17.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	100	60	60
A_1	120	4	5	6	7
A_2	80	4	9	3	2
A_3	50	6	5	2	3

18.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		90	60	60	40
A_1	130	4	5	6	7
A_2	80	4	9	3	2
A_3	50	6	5	2	3

19.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	60
A_1	120	4	5	6	7
A_2	70	4	9	3	2
A_3	50	6	5	2	3

20.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	80	90	60
A_1	120	4	5	6	7
A_2	80	4	9	3	2
A_3	50	6	5	2	3

21.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	60
A_1	80	4	5	6	7
A_2	120	4	9	3	2
A_3	70	6	5	2	3

22.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	90	70	60
A_1	80	4	5	6	7
A_2	110	4	9	3	2
A_3	50	6	5	2	3

23.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		90	60	60	40
A_1	90	4	5	6	7
A_2	120	4	9	3	2
A_3	50	6	5	2	3

24.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	50
A_1	80	4	5	6	7
A_2	120	4	9	3	2
A_3	50	6	5	2	3

25.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	50	90	60
A_1	80	4	5	6	7
A_2	120	4	9	3	2
A_3	60	6	5	2	3

26.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	80	60
A_1	50	4	5	6	7
A_2	80	4	9	3	2
A_3	110	6	5	2	3

27.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	90	100	60
A_1	50	4	5	6	7
A_2	80	4	9	3	2
A_3	120	6	5	2	3

28.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		90	60	90	40
A_1	50	4	5	6	7
A_2	80	4	9	3	2
A_3	120	6	5	2	3

29.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		60	40	90	70
A_1	50	4	5	6	7
A_2	70	4	9	3	2
A_3	120	6	5	2	3

30.

Поставщики и их мощности		Потребители и их спрос			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		40	60	90	80
A_1	50	4	5	6	7
A_2	80	4	9	3	2
A_3	120	6	5	2	3

Образец выполнения задачи 5.

Пусть матрица тарифов задана следующей таблицей:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		200	150	100	150
A_1	100	2	3	1	4
A_2	300	3	1	2	2
A_3	150	4	1	3	5

Проверим равенство запасов и потребностей:

$\sum a_i = 100 + 300 + 150 = 550$; $\sum b_j = 200 + 150 + 100 + 150 = 600$.

Равенство не выполняется ($550 \neq 600$), следовательно, транспортная задача является открытой. Сведём её к закрытой модели путем введения фиктивного поставщика. Положим его запас равным дефициту ресурса (600 – 550 = 50), а тарифы на перевозки - равными 0.

Построим новую транспортную таблицу и определим начальное распределение методом северо-западного угла:

	200	150	100	150
100	100 (2)	(3)	(1)	(4)
300	100 (3)	150 (1)	50 (2)	(2)
150	(4)	(1)	50 (3)	100 (5)
50	(0)	(0)	(0)	50 (0)

При этом стоимость перевозок составит:

$F_{сз} = 100*2 + 100*3 + 150*1 + 150*2 + 50*3 + 50*5 + 50*0 = 1400$ (усл.ед).

Проверяем количество заполненных клеток – 7.

$m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7.$

Определим потенциалы и оценки свободных клеток:

[illegible]

Так как число уравнений меньше числа неизвестных, выберем один из потенциалов произвольно. Положив $U_1 = 0$, получим:

$V_1 = 2,\ V_2 = 0,\ V_3 = 1,\ V_4 = 3,\quad U_2 = 1,\ U_3 = 2,\ U_4 = -3.$

Найдём оценки свободных клеток $S_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$:

$S_{12} = 3 - (0 + 0) = 3 \geq 0,\quad S_{13} = 1 - (0 + 1) = 0,\quad S_{14} = 4 - (0 + 3) = 1 \geq 0,$

$S_{24} = 2 - (1 + 3) = -2 < 0,\quad S_{31} = 4 - (2 + 2) = 0,\quad S_{32} = 1 - (2 + 0) = -1 < 0,$

$S_{41} = 0 - (2 - 3) = 1 \geq 0, \quad S_{42} = 0 - (0 - 3) = 3 \geq 0, \quad S_{43} = 0 - (1 - 3) = 2 \geq 0.$

Поскольку среди оценок свободных клеток есть отрицательные ($S_{24} = -2$; $S_{32} = -1$), то найденный план оптимальным не является.

Для перераспределения поставок выбираем клетку с наибольшей по модулю отрицательной оценкой – клетка (2; 4) – и строим цикл, первая вершина которого находится в выбранной клетке, а остальные – в заполненных клетках. В вершинах цикла поочередно расставляем знаки «+» и «–», начиная со свободной клетки.

	200	150	100	150
100	100 (2)	(3)	(1)	(4)
300	100 (3)	150 (1)	50 (2) –	(2) +
150	(4)	(1)	+ 50 (3)	– 100 (5)
50	(0)	(0)	(0)	50 (0)

Определяем размер перераспределяемой поставки (минимальное из значбений в клетках со знаком «–»): min (50; 100) = 50. Перераспределяем 50 единиц ресурса и получаем новый план поставок:

	200	150	100	150
100	100 (2)	(3)	(1)	(4)
300	100 (3)	150 (1)	(2)	50 (2)
150	(4)	(1)	100 (3)	50 (5)
50	(0)	(0)	(0)	50 (0)

Новая стоимость перевозок составит:

$$F_1 = 100 * 2 + 100 * 3 + 150 * 1 + 50 * 2 + 100 * 3 + 50 * 5 + 50 * 0 = 1300 \text{ (усл.ед)}$$

Определим потенциалы и оценки свободных клеток:

$U_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_2 = 1, \quad U_3 = 4, \quad U_4 = -1, V_1 = 2, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = -1, \quad V_4 = 1$

$S_{12} = 3 > 0, \quad S_{13} = 2 > 0, \quad S_{14} = 3 > 0, \quad S_{23} = 2 > 0, \quad S_{31} = -2 < 0,$

$S_{32} = -3 < 0, \quad S_{41} = -1 < 0, \quad S_{42} = 1 > 0, \quad S_{43} = 2 > 0.$

План не оптимален. Выберем клетку (3; 2) и строим цикл:

	200	150	100	150
100	100 [2]	[3]	[1]	[4]
300	100 [3]	150 [1] −	[2]	50 [2] +
150	[4]	[1] +	100 [3]	[5] 50 −
50	[0]	[0]	[0]	50 [0]

Размер перераспределяемой поставки: min (150; 50) = 50.

Новый план:

	200	150	100	150
100	100 [2]	[3]	[1]	[4]
300	100 [3]	100 [1]	[2]	100 [2]
150	[4]	50 [1]	100 [3]	[5]
50	[0]	[0]	[0]	50 [0]

Стоимость поставок: $F_2 = 1150$ усл.ед.

Потенциалы:

$U_1 = 0, \quad U_2 = 1, \quad U_3 = 1, \quad U_4 = -1, \quad V_1 = 2, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 2, \quad V_4 = 1.$

Оценки свободных клеток:

$S_{12} = 3 > 0, \quad S_{13} = -1 < 0, \quad S_{14} = 3 > 0, \quad S_{23} = -1 < 0, \quad S_{31} = 1 > 0,$

$S_{34} = 3 > 0, \quad S_{41} = -1 < 0, \quad S_{42} = 1 > 0, \quad S_{43} = -1 < 0.$

Строим цикл для клетки (1;3):

	200	150	100	150
100	[2] 100 −	[3]	[1] +	[4]
300	[3] 100 +	[1] 100 −	[2]	[2] 100
150	[4]	[1] 50 +	[3] 100 −	[5]
50	[0]	[0]	[0]	[0] 50

Размер перераспределяемой поставки: min (100;100;100) = 100.

Новый план:

	200	150	100	150
100	[2]	[3]	[1] 100	[4]
300	[3] 200	[1] 0	[2]	[2] 100
150	[4]	[1] 150	[3] 0	[5]
50	[0]	[0]	[0]	[0] 50

Стоимость перевозок: $F_3 = 1050$ усл.ед..

Внимание! Вырожденное решение: если обнуляются несколько клеток, то только одна становится пустой, остальные считаются заполненными (нулями).

Потенциалы:

$U_1 = 0,\quad U_2 = 2,\quad U_3 = 2,\quad U_4 = -1,\quad V_1 = 1,\quad V_2 = -1,\quad V_3 = 1,\quad V_4 = 1.$

Оценки свободных клеток:

$S_{11} = 1 > 0,\quad S_{12} = 4 > 0,\quad S_{14} = 3 > 0,\quad S_{23} = -1 < 0,\quad S_{31} = 1 > 0,$

$S_{34} = 2 > 0,\quad S_{41} = 0,\quad S_{42} = 2 > 0,\quad S_{43} = 0.$

Строим цикл для клетки (2;3):

	200	150	100	150
100	[2]	[3]	100 [1]	[4]
300	200 [3]	0 [1] −	[2] +	100 [2]
150	[4]	150 [1] +	0 [3] −	[5]
50	[0]	[0]	[0]	50 [0]

Внимание! Холостой ход – перераспределяется нулевая поставка (min (0; 0) = 0), стоимость не меняется.

	200	150	100	150
100	[2]	[3]	100 [1]	[4]
300	200 [3]	[1]	0 [2]	100 [2]
150	[4]	150 [1]	0 [3]	[5]
50	[0]	[0]	[0]	50 [0]

Стоимость перевозок также не меняется ($F_4 = 1050$ усл.ед.**),** однако из-за изменения заполненных клеток пересчитываем потенциалы:

$U_1 = 0$, $U_2 = 1$, $U_3 = 2$, $U_4 = -1$, $V_1 = 2$, $V_2 = -1$, $V_3 = 1$, $V_4 = 1$.

Оценки свободных клеток:

$S_{11} = 0$, $S_{12} = 4 > 0$, $S_{14} = 3 > 0$, $S_{22} = 1 > 0$, $S_{31} = 0$,

$S_{34} = 2 > 0$, $S_{41} = -1 < 0$, $S_{42} = 2 > 0$, $S_{43} = 0$.

Строим цикл для клетки (4; 1):

	200	150	100	150
100	[2]	[3]	100 [1]	[4]
300	200 [3] −	[1]	0 [2]	+ 100 [2]
150	[4]	150 [1]	0 [3]	[5]
50	+ [0]	[0]	[0]	− 50 [0]

Перераспределяем min (50;200) = 50.

	200	150	100	150
100	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	100 $\boxed{1}$	$\boxed{4}$
300	150 $\boxed{3}$	$\boxed{1}$	0 $\boxed{2}$	150 $\boxed{2}$
150	$\boxed{4}$	150 $\boxed{1}$	0 $\boxed{3}$	$\boxed{5}$
50	50 $\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

$F_5 = 1000$ усл.ед..

Снова находим потенциалы:

$U_1 = 0,\ \ U_2 = 1,\ \ U_3 = 2,\ \ U_4 = -2,\ \ V_1 = 2,\ \ V_2 = -1,\ \ V_3 = 1,\ \ V_4 = 1.$

Оценки свободных клеток:

$S_{11} = 0,\ \ S_{12} = 4 > 0,\ \ S_{14} = 3 > 0,\ \ S_{22} = 1 > 0,\ \ S_{31} = 0,\ \ S_{34} = 2 > 0,$

$S_{42} = 3 > 0,\ \ S_{43} = 1 > 0,\ \ S_{44} = 1 > 0.$

Поскольку все оценки неотрицательны, найденный план является оптимальным. Однако оптимальное решение не единственно, поскольку среди оценок свободных клеток есть нулевые.

Составим распределение поставок методом наименьших затрат (минимального элемента). На каждом шаге заполняется клетка с минимальным тарифом из оставшихся. (Внизу указан порядок заполнения клеток.)

	200	150	100	150
100	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	100 $\boxed{1}$ *2*	$\boxed{4}$
300	$\boxed{3}$	150 $\boxed{1}$ *3*	$\boxed{2}$	150 $\boxed{2}$ *4*
150	150 $\boxed{4}$ *5*	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	$\boxed{5}$
50	50 $\boxed{0}$ *1*	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$

$F_{нз} = 1150$ усл.ед.

Вопросы для самопроверки:

1. Какая транспортная задача называется открытой?
2. Как свести открытую задачу к закрытой?
3. Опишите порядок построения начального плана методом северо-западного угла и наименьших затрат?
4. Всегда ли план, полученный методом наименьших затрат, является оптимальным?
5. В чем смысл оценок свободных клеток?
6. Как определяется размер перераспределяемой поставки?
7. Как определить, будет ли оптимальное решение единственным?
8. Если оптимальное решение не единственно, как получить другие оптимальные решения?
9. В чем смысл фиктивных поставок?

~~ЗАДАЧА 6~~

~~Используя минимаксные стратегии, определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей, цену игры и оптимальные чистые стратегии игроков.~~

1.

4	5	1
1	2	-2
6	7	3

2.

5	3	1
2	0	-2
7	5	3

3.

5	3	4
4	2	3
7	5	6

4.

1	3	4
4	6	7
3	5	6

5.

7	3	4
0	-4	-3
9	5	6

6.

5	-2	7
4	-3	6
6	-1	8

7.

-1	-7	-4
6	0	3
5	-1	2

8.

4	-1	6
3	-2	5
6	1	8

9.

0	-1	6
1	0	7
2	1	8

10.

3	-1	6
6	2	9
5	1	8

11.

8	17	11
6	15	9
5	14	8

12.

8	4	11
-4	-8	-1
5	1	8

13.

-1	-7	2
3	-3	6
5	-1	8

14.

3	7	0
6	10	3
5	9	2

15.

5	0	7
-3	-8	-1
6	1	8

16.

1	7	3
-2	4	0
6	12	8

17.

13	9	15
-2	-6	0
6	2	8

18.

5	6	7
3	4	5
6	7	8

19.

8	4	10
3	-1	5
6	2	8

20.

4	-2	5
7	1	8
5	-1	6

21.

8	-2	5
11	1	8
10	0	7

22.

5	-2	3
1	-6	-1
6	-1	4

23.

7	1	8
0	-6	1
3	-3	4

24.

0	5	3
5	10	8
1	6	4

25.

-7	-1	-2
0	6	5
-1	5	4

26.

0	5	3
1	6	4
4	9	7

27.

6	5	7
2	1	3
7	6	8

28.

0	4	3
1	5	4
-1	3	2

29.

8	1	9
2	-5	3
7	0	8

30.

5	1	9
-2	-6	2
4	0	8

Образец выполнения задачи 6.

Игра задана платёжной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Определим верхнюю и нижнюю цену игры. Поскольку первый игрок придерживается максиминной стратегии, для каждой из стратегий первого игрока определяется наихудший вариант (наименьший выигрыш), а затем из них выбирается наилучший (наибольший).

Нижняя цена игры: $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$

Второй игрок следует минимаксной стратегии: для каждой стратегии второго игрока выбирается наихудший вариант (наибольший проигрыш), а затем из них выбирается наилучший (наименьший).

Верхняя цена игры: $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.

Для заданной платежной матрицы находим:

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	4	9	5	3	3
A_2	7	8	6	9	6
A_3	7	4	2	6	2
A_4	8	3	4	7	3
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	8	9	6	9	$\alpha = \max\limits_i \alpha_i = 6$ $\beta = \min\limits_j \beta_j = 6$

Поскольку $\alpha = \beta = 6$, то игра имеет седловую точку, и существует оптимальное решение игры в чистых стратегиях.

Оптимальная стратегия первого игрока - A_2, оптимальная стратегия второго игрока - B_3. Цена игры $v = 6$.

Вопросы для самопроверки:

1. Что такое матричная игра с нулевой суммой?
2. В чем смысл элементов платёжной матрицы?
3. Что такое чистая стратегия?
4. Что называется ценой игры?
5. Что такое седловая точка?
6. В чем сущность оптимальных чистых стратегий?

~~ЗАДАЧА 7~~

~~Определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей. Упростить игру, если это возможно. Найти решение в смешанных стратегиях графически и с помощью симплекс-метода~~.

1.

4	16	-8	1
-5	12	20	8

2.

5	-1	-11	-6
-4	6	5	2

3.

10	-2	10	18
4	21	22	8

4.

10	6	-18	18
4	2	10	8

5.

7	3	5	-11
3	2	2	5

6.

11	-4	8	17
3	6	2	5

7.

15	-5	11	3
7	-3	5	-11

8.

-1	31	23	17
12	7	11	14

9.

-3	15	15	-15
-4	23	11	21

10.

10	2	11	9
5	7	3	7

11.

3	8	0	2
-4	-2	20	12

12.

-1	14	-1	-6
11	10	-5	-2

13.

4	6	12	8
7	10	4	13

14.

0	12	-2	-8
2	-8	-4	-2

15.

11	-4	-4	1
3	-2	4	-5

16.

2	3	-2	7
8	-3	1	6

17.

2	3	3	7
4	1	2	1

18.

5	-1	5	14
-4	13	5	7

19.

10	7	4	9
-4	23	6	2

20.

3	4	7	2
5	1	3	9

21.

4	3	0	-2
3	1	8	2

22.

1	11	-2	-4
3	10	-8	12

23.

4	-6	2	8
1	4	5	3

24.

10	14	-8	8
-7	10	-4	13

25.

2	9	3	7
8	7	9	6

26.

1	7	2	9
9	11	7	3

27.

-1	9	3	7
9	1	7	13

28.

-3	15	5	15
4	-7	15	9

29.

10	2	14	9
5	9	3	3

30.

2	8	1	3
5	2	3	3

Образец выполнения задачи 7.

Пусть матричная игра задана платежной матрицей:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	12	-1	-4
A_2	1	10	-8	12

Определим нижнюю и верхнюю цену игры:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	0	12	-1	-4	-4
A_2	1	10	-8	12	-8
β_j	1	12	-1	12	$\alpha = -4, \quad \beta = -1$

Так как нижняя и верхняя цена игры не совпадают, то не существует оптимального решения в чистых стратегиях.

Упростим игру, вычеркнув доминируемые (обеспечивающие заведомо больший проигрыш) стратегии для второго игрока:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	12	-1	-4
A_2	1	10	-8	12

→

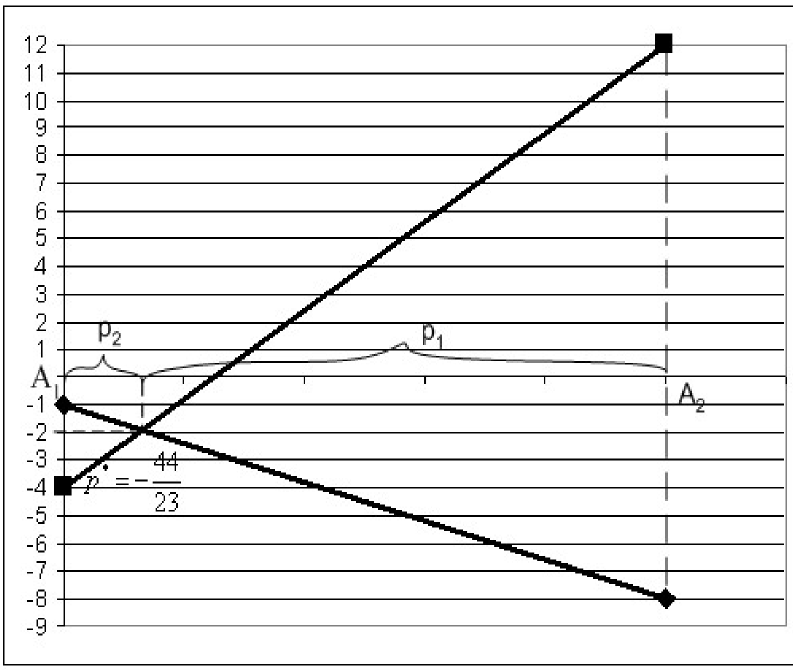
	B_1	B_3	B_4
A_1	0	-1	-4
A_2	1	-8	12

→

	B_3	B_4
A_1	-1	-4
A_2	-8	12

Решим задачу графически.

Для первого игрока обозначим p_1 – вероятность выбора стратегии A_1, p_2 – вероятность выбора стратегии A_2. Построим линии выигрыша для случаев, если второй игрок выбирает стратегии B_3 иB_4 соответственно. Оптимальное решение – верхняя точка нижней огибающей этих прямых.



$$\begin{cases} \upsilon = -p_1 - 8(1 - p_1) \\ \upsilon = -4p_1 + 12(1 - p_1) \end{cases}$$

$$p_1 - 8(1 - p_1) = -4p_1 + 12(1 - p_1)$$

$$7p_1 - 8 = -16p_1 + 12$$

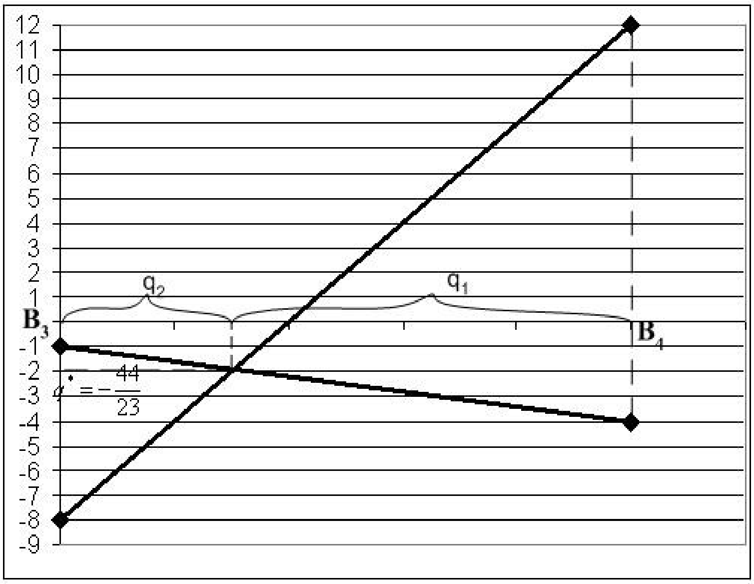
$$23p_1 = 20$$

$$p_1 = \frac{20}{23}$$

$$p_2 = 1 - \frac{20}{23} = \frac{3}{23}$$

$$\upsilon^* = 7 * \frac{20}{23} - 8 = -\frac{44}{23}$$

Аналогично поступаем для второго игрока, только на этот раз выбираем нижнюю точку на верхней огибающей.



$-q_1 - 4(1-q_1) = -8q_1 + 12(1-q_1)$

$3q_1 - 4 = -20q_1 + 12$

$23q_1 = 16$

$q_1 = \frac{16}{23}$

$q_2 = 1 - \frac{16}{23} = \frac{7}{23}$

$\upsilon^* = 3*\frac{16}{23} - 4 = -\frac{44}{23}$

Решим задачу симплекс-методом. Для этого преобразуем элементы платежной матрицы, чтобы не было отрицательных элементов.

	B_3	B_4
A_1	-1	-4
A_2	-8	12

$\xrightarrow{+8}$

	B_3	B_4
A_1	7	4
A_2	0	20

Запишем условия оптимальности смешанных стратегий.

Для первого игрока: $\begin{cases} 7p_1 + 0p_2 \ge \upsilon \\ 4p_1 + 20p_2 \ge \upsilon \end{cases}$

Для второго игрока: $\begin{cases} 7q_1 + 4q_2 \le \upsilon \\ 0q_1 + 20q_2 \le \upsilon \end{cases}$

Разделим каждое из неравенств на υ и введем замену: $x_i = \frac{p_i}{\upsilon}; y_i = \frac{q_j}{\upsilon}$.

Сформулируем пару двойственных задач.

Для первого игрока:

$f = x_1 + x_2 \to \min$

$\begin{cases} 7x_1 + 0x_2 \ge 1 \\ 4x_1 + 20x_2 \ge 1 \end{cases}$

Для второго игрока:

$z = y_1 + y_2 \to \max$

$\begin{cases} 7y_1 + 4y_2 \le 1 \\ 0y_1 + 20y_2 \le 1 \end{cases}$

Решим вторую задачу симплекс-методом, приведя ее к каноническому виду:

$$z = y_1 + y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 4y_2 + y_3 = 1 \\ 20y_2 + y_4 = 1 \end{cases}$$

	y_1	y_2		
y_3	7	4	1	$\frac{1}{4}$
y_4	0	20	1	$\frac{1}{20}$

→

	y_1	y_4	
y_3	7	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
y_2	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

→

	y_3	y_4	
y_1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$
y_2	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

z	1	1	0	

z	1	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{20}$

z	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{140}$	$-\frac{23}{140}$

Оптимальное решение: $y_1{*}=\frac{4}{35}$, $y_2{*}=\frac{1}{20}$, $z{*}=\frac{23}{140}$.

На основе принципа двойственности найдем оптимальное решение первой задачи. Для этого составим следующую таблицу:

Прямая		x_1	x_2	x_3	x_4
	x^*	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{140}$	0	0
	f^*	—	—	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{20}$
Двойственная		y_3	y_4	y_1	y_2
	y^*	0	0	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{20}$
	z^*	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{140}$	—	—

Оптимальное решение первой задачи: $x_1{*}=\frac{1}{7}$, $x_2{*}=\frac{3}{140}$, $f{*}=\frac{23}{140}$.

Найдем цену игры с преобразованной платежной матрицей и оптимальные стратегии игроков.

$v' = 1/f^* = \frac{140}{23}$.

$p_1 = \frac{1}{7} * \frac{140}{23} = \frac{20}{23}$, $p_2 = \frac{3}{140} * \frac{140}{23} = \frac{3}{23}$.

$q_1 = \frac{4}{35} * \frac{140}{23} = \frac{16}{23}$, $q_2 = \frac{1}{20} * \frac{140}{23} = \frac{7}{23}$.

Оптимальные стратегии: $p^* = (\frac{20}{23}, \frac{3}{23})$; $q^* = (0, 0, \frac{16}{23}, \frac{7}{23})$.

Цена исходной игры: $v = \frac{140}{23} - 8 = -\frac{44}{23}$

Вопросы для самопроверки:

1. В каком случае не существует оптимального решения в чистых стратегиях?
2. Что называется смешанной стратегией?
3. Как в случае смешанных стратегий определяется цена игры?
4. Что такое доминирующие и доминируемые стратегии?

5. Сформулируйте условия оптимальности смешанных стратегий.

6. Почему элементы платежной матрицы при решении симплекс-методом должны быть неотрицательными?

7. как в матричных играх используется принцип двойственности?

8. В каком случае матричную игру можно решить графически?